

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРАКСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ

Математичні олімпіади:

Крок за кроком *(методичний посібник)*

Черкаси – 2007

Автори:

Козлова О.М., методист Черкаського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників.

Черепінський О.Д., вчитель-методист фізико-математичного ліцею м.Черкас.

Рецензенти:

Тарасенкова Н.А., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри геометрії та методики навчання математики Черкаського національного університету ім. Б.Хмельницького.

Музика О.Ю., вчитель-методист спеціалізованої школи I-III ступенів №5 Смілянської міської ради Черкаської області..

Затверджено на засіданні Вченої ради інституту
Протокол №4 від 27.12.2006р.

Передмова

Гра та змагання за першість – заняття, якими не втомлюються займатися люди в будь-якому віці, починаючи з дитинства, і в будь-якій сфері діяльності. Це можливість одержувати цілу низку позитивних емоцій, які заряджають життєвою енергією людину, формують такі важливі якості як сила волі, логічне мислення, увага, наполегливість, здатність до переборювання труднощів та ін.

Шкільні математичні олімпіади є чудовою можливістю перевірити свої математичні здібності, вольові якості та відчувати насолоду від розв'язаних задач.

Даний посібник розрахований на учнів 6-11 класів і може допомогти їм та вчителям у цілеспрямованій підготовці до таких змагань.

6 клас

Розв'язати рівняння:

$$2 \cdot (0,2 - 0,02 : (0,002 + 0,0002 x)) = 0,3.$$

Обчислити:

$$(17 \frac{3535}{88375} - 16 \frac{1001}{1365}) \cdot 3 \frac{6}{23} + 3 \frac{6}{23} : (5 - 1 \frac{187}{253}).$$

Добуток двох взаємно простих чисел дорівнює 1328. Чому дорівнює найменше спільне кратне цих чисел? Знайти ці числа.

Прямокутник поділено на чотири прямокутники, площі трьох з них 4 см^2 ,

8 см^2 , 12 см^2 . Знайти площу четвертого прямокутника.

8	4	8
	12	

Збільшиться чи зменшиться правильний дріб, якщо до його чисельника і знаменника додати одне й те саме натуральне число?

Ціна квитка в цирк становить 3 грн. Після зниження ціни квитка кількість відвідувачів збільшилась на 50%, а збір збільшився на 25%. На скільки знижено ціну на квиток?

Виписати натуральні числа від 1 до 100 в рядок так, щоб різниця будь-яких сусідніх (від більшого віднімається менше) була не менша за 50.

В отарі 8 овець.. Перша з'їдає копицю сіна за 1 день, друга – за 2 дні, третя – за 3 дні,..., восьма – за 8 днів. Хто швидше з'їсть копицю сіна: дві перші вівці чи всі останні разом?

Чи існує таке натуральне число, яке ділиться на 2006 і сума його цифр також ділиться на 2006?

Незнайка сказав своєму другу Шпунтику: “Я придумав приклад на ділення, в якому ділене, дільник, частка та остача закінчуються відповідно на 1,3,5,7”.

Подумавши, Шпунтик відповів: “Щось ти плутаєш”. Чи мав рацію Шпунтик?

На дошці написані числа 0,1,2,0. За один крок дозволяється додавати 1 до довільних двох із них. Чи можна, повторюючи цю операцію, домогтися, щоб всі числа стали рівними?

Які цифри треба поставити замість букв А і Б, щоб одержалась правильна рівність: $AB \cdot A \cdot B = BBB$? (АБ – двоцифрове число, BBB – трицифрове число). Три теплоходи заходять у порт після кожного рейсу. Рейс першого теплохода триває 6 годин, другого – 15 годин, третього – 4 години. Через скільки годин (найближчим часом) зустрінуться в порту всі три теплоходи, якщо вони вийшли одночасно?

Відповідь приклад:

159

x xxx _____

xxx

xxx

3xx

xxx 29

Якщо з квадратного кілометра якогось матеріалу нарізати ленту шириною 2 см, то якої довжини могла бути лента? Яка була б площа цієї ленти?

У квартирі є годинник з боєм. Він відбиває цілу кількість годин і одним ударом кожні півгодини. Скільки ударів робить цей годинник за добу?

В класі 30 учнів. Із них 18 відвідують секцію легкої атлетики, 10- секцію плавання і 3 – обидві секції. Скільки учнів цього класу не відвідують жодної секції?

Скільки разів на добу годинна і хвилина стрілки утворюють прямий кут?

Чотири палички мають довжину 1 см, чотири палички – 2 см, сім паличок – 3 см, п'ять паличок – 4 см. Чи можна з усіх паличок скласти прямокутник?

Відповіді та вказівки 6 клас

1990.

2. Необхідно скоротити дроби.

$16 \cdot 83$; $1 \cdot 1328$.

Розкладемо 1328 на множники: $1328 = 2^4 \cdot 83$. Всі двійки повинні бути в одному з чисел.

$НСК(16; 83) = 1328$. $НСК(1; 1328) = 1328$.

24 см^2 . Довжина правого нижнього прямокутника вдвічі більше довжини лівого нижнього, а інша сторона спільна.

Збільшиться.

50 коп.

Нехай p – початкове число відвідувачів, x – нова ціна квитка. Складемо рівняння для збору грошей: $x \cdot 1,5 p = 3p \cdot 1,25$.

50, 100, 49, 99, 48, 98, 47, 97, ..., 2, 52, 1, 51.

Дві перші.

Швидкість з'їдання у двох перших $1 + \frac{1}{2}$, а всіх останніх $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$.

Але $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$,
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

2006 2006...2006 (число 2006 повторюється 2006 разів).

Так.

Застосовуємо формулу ділення з остачею для натуральних чисел $a = vq + c$, $0 \leq c < v$, а непарне число, $vq + c$ – парне.

Ні. Початкова сума числа 3. За кожний крок вона збільшується на 2 і, отже, залишається непарним числом.

$A = 3$, $B = 7$.

Скоротимо на B , одержимо $AB \cdot A = 111$.

Але $111 = 37 \cdot 3$, тому $A = 3$, $B = 7$.

Через 60 год.

$$\begin{array}{r} 159 \\ \times 231 \\ \hline 159 \\ + 477 \\ 318 \\ \hline 36729 \end{array}$$

Довжина 50 000 км, площа 1 км².

324.

$1+2+3+\dots+24=(1+24) \cdot 12 = 300$

$300+24= 324$.

5 учнів.

$18-3= 15$ – відвідують тільки легку атлетику

$10-3= 7$ – відвідують тільки плавання

$30-(15+7+3)= 5$ – не відвідують жодної секції

44 рази. За добу годинна стрілка робить 2 оберти, а хвилинна – 24. Звідси хвилинна стрілка обганяє годинну 22 рази і кожного разу з годинниковою стрілкою утворює по два прямих кути.

Ні. Припустимо, що з усіх паличок можна скласти прямокутник. Тоді його сторони повинні вимірюватись цілими числами p і k , а периметр прямокутника має бути парним числом $P=2(p+k)$. В той же час периметр прямокутника рівний сумі довжини всіх паличок

$P = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 53$.

7 клас

Розв'язати рівняння:

$$\left(\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x-2}{0,35} \right) \cdot 2,8 + 1,75 \right) : 0,05 = 235$$

Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 11, 13 і 15 дає відповідно остачі 2, 4 і 6.

Чи є число 2005^{2004} точним квадратом?

Чи можна в записку $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 20$ замість зірочок поставити (в довільному порядку) знаки “+” і “-” так, щоб одержалась правильна рівність?

Василь, виконавши арифметичні дії, позначив два цілих числа буквами X та Y і одержав наступний приклад:

$$264 \cdot X + 51 \cdot Y = 2006$$

Потім він запропонував Петрику знайти, чому дорівнюють X і Y, однак Петрик сказав, що Василь при обчисленнях зробив помилку. Чи мав рацію Петрик?

У послідовності 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ... вкажіть цифру, що стоїть на 1000-му місці.

Учора кількість учнів, які були присутніми у класі, була у 8 разів більшою від числа відсутніх. Сьогодні не прийшли ще два учні і виявилось, що кількість відсутніх складає 20% від числа присутніх у класі. Скільки усього учнів у класі?

В алфавіті є тільки дві букви А і Я. Комбінації букв АЯ і ЯЯЯ, ЯА і ААЯ, ЯЯ і ААА в будь-якому слові можна замінити одну на одну. Чи можна зі слова АЯЯ одержати слово ЯАА?

Годинник показує 2-у годину. Визначте кут між стрілками через 20 хвилин.

Вік деякої людини у 2001 році дорівнював сумі цифр року його народження. У якому році народилася ця людина?

Кіт Базіліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо він складе чудовий квадрат 6×6 з чисел 1, -1, 0 так, щоб усі суми по рядках, стовпчиках і по великих діагоналях були різними. Допоможіть Буратіно.

Три човни стартували одночасно зі швидкостями, що відрізняються одна від одної на ту саму величину. Перший човен фінішував через 36 хвилин, третій – через 45 хв. Через скільки хвилин фінішував другий човен?

Поїзд повз телеграфний стовп проходить за 20 с, через міст довжиною – 80 м – за 25 с. Яку відстань проходить поїзд за 5 с? Яка довжина поїзда? Яка швидкість поїзда?

Вологість трави 80%, а сіна – 17%. Скільки вийде сіна з 1 т трави?

Сашко купив в універмазі товарів на 127 гривень. Хоча в Сашка були тільки купюри по 5 грн., а в касира тільки купюри по 2 грн., Сашко розплатився з касиром. Яка найменша кількість купюр повинна бути у Сашка?

Знайдіть два таких числа, що якщо їх додати, відняти від більшого менше, а потім усі чотири результати додати, то отримаємо 245.

Доведіть, що різниця $999993^{1999} - 777777^{1997}$ кратне 5.

Собака, що знаходиться в точці А, погнала за лисицею, яка була на відстані 30 м від собаки в точці В. Стрибок собаки дорівнює 2 м, стрибок лисиці – 1 м. Собака робить два стрибки в той час, коли лисиця робить три стрибки. На якій відстані від точки А собака дожене лисицю?

Комар виповзає з точки О і рухається по числовій прямій. За 1 секунду він проповзає одиницю довжини. В скількох точках він може побувати за 1 хвилину, якщо він може змінювати напрям руху через ціле число секунд?

Відповіді та вказівки

7 клас

$x = 4$.

2136. Якщо до даного числа додати 9, то здобує число ділитиметься на 11, 13 і 15.

Так, тому що 2004^{2003} - парне число.

Ні. Сума $1+2+\dots+9=55$ – непарне число. При заміні “+” на “-” – перед числом а сума зменшиться на 2а – парне число.

Так. Перевірити подільність на 3.

7. Підрахуйте кількість одноцифрових, двоцифрових, трицифрових чисел.

36.

Ні. Кількість букв Я змінюється на парну кількість, або не змінюється.

50° .

1977.

Не можна. Різних сум всього 13 : - 6, -5, -4, -3, ..., 0,1,2,...,5,6, а необхідно скласти 14.

40 хв. Якщо t хв. – шуканий час, то $\frac{s}{36} - \frac{s}{t} = \frac{s}{t} - \frac{s}{45}; \frac{2}{t} = \frac{9}{180}, t = 40$.

80м, 320 м, 57,6 км/год

≈ 241 кг.

27 копюр 1) $5 \cdot 27 = 135$

2) $135-8=127$

(81; 2), (80; 5), (79; 8),...(62; 59)

Нехай більше число x , а менше y , тоді

$$x + y + (x + y) + (x - y) = 245$$

$$x + y + x + y + x - y = 235$$

$$3x + y = 245$$

Підбираємо числа:

$$x = 81, y = 2$$

$$x = 80, y = 5$$

19) $x = 62, y = 59$.

Степені чисел, що закінчуються цифрою 3, мають закінчення 3,9,7,1. Степені чисел, що закінчуються цифрою 7, мають закінчення 7,9,3,1

$$1999 = 1996 + 3 = 4 \cdot 466 + 3$$

$$1997 = 4 \cdot 466 + 1$$

Обидва даних степені мають цифру одиниць 7, тому їх різниця кратна 5.

120 м. Проміжок часу. за який собака пробігає 4 м (2 стрибки), лисиця пробіжить тільки 3 м (3 стрибки). Отже, відстань між ними скорочується на 1 м. Початкова відстань між собакою і лисицею дорівнює 30 м, тому собака дожене лисицю на відстані 120 м від точки А.

Найбільше число точок числової прямої з цілочисловими координатами, в яких комар може побувати за 1 хв., рівне 2, а найбільше – 61. В першому випадку комар повинен змінювати напрям руху через кожну секунду, в другому випадку – весь час рухатись в одному напрямку.

8 клас

Сума 2006 цілих чисел непарна. Довести, що добуток цих чисел – парне число.

Довести, що число $2^9 + 2^{99}$ ділиться на 100.

Довести, що ні при яких натуральних m і n число $10^m + 1$ не ділиться на $10^n - 1$.

Чи може число $k^2 + k + 1$ при деякому натуральному k бути точним квадратом?

Довести, що якщо два натуральних числа можна представити у вигляді суми двох квадратів, то їх добуток також можна представити у вигляді суми двох квадратів.

Чотири населені пункти розташовані у вершинах опуклою чотирикутника. У якому місці варто побудувати завод, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох даних пунктів була найменшою?

Висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні 1 : 3, Знайти гострі кути трикутника.

Побудуйте графік функції: $y = \frac{x^4 - 16}{(x^2 + 4)(x - 2)}$

На колі розташовані 2005 червоних і одна біла точка. Розглядається всілякі многокутники з вершинами в цих точках. Яких многокутників більше – з білою вершиною чи без неї?

Розкласти на множники $n^4 + 4$.

Що більше $\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$ чи $\frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1}$?

Розв'язати рівняння: $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$.

Записати многочлен $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ у вигляді суми квадратів трьох виразів.

Скільки цифр в десятковому запису числа 2^{100} ?

Визначити чотиризначне число, якщо ділення цього числа на два різних однозначних проводиться за такими схемами:

xxxx | _____

х _____

Знайти два таких цілих додатніх числа, різниця квадратів яких дорівнює 133.

Знайти два числа, сума, різниця і добуток яких знаходиться у відношенні 5 : 1 : 18.

Сума двох натуральних чисел 145, а найменше спільне кратне 174. Знайти ці числа.

Відстань між основними двох висот ромба, проведених з вершини тупого кута, рівна половині діагоналі. Визначити величину кутів ромба.

Відповіді та вказівки 8 клас

Хоча б одне з чисел парне.

$$2^9 + 2^{99} = 2^9(1+2^{90}) = 2^9(1+1024^9) = 2^9(1+1024^3)(1-1024^3 + 1024^6) = 2^9 \cdot 1025 \cdot (1-1024+1024^2)(1-1024^3+1024^6).$$

Число $10^n - 1$ ділиться на 9, а 10^m не ділиться.

$k^2 < k^2 + k + 1 < (k+1)^2$, а числа k^2 і $(k+1)^2$ - сусідні квадрати.

$m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, то

$$mn = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

У точці перетину діагоналей.

30° і 60° . Нехай АВ – гіпотенуза $\triangle ABC$ і $CM \perp AB$, $BM : MA = 3 : 1$. СО – медіана. $AM = MO$, то $\triangle ACO$ – рівнобедрений. Отже, $\angle A = \angle AOC = 2 \angle B$.

$$y = x + 2 \text{ при } x \neq 2.$$

З білою.

Кожному “червоному” многокутнику можна однозначно співставити “білий” многокутник: п’ятикутнику – шестикутник, 20 – кутнику – 21 кутнику і т. д. Але, при цьому білі трикутники залишаються зайвими - їм співставити нічого.

$$n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Поділимо ці вирази:

$$\frac{(10^{10} + 1)(10^{12} + 1)}{(10^{10} + 1)^2} \cdot \frac{10^{22} + 10^{10} + 10^{12} + 1}{10^{22} + 2 \cdot 10^{11} + 1} > 1, \text{ так як}$$

$$10^{10} + 10^{12} = 10^{10}(1 + 10^2) = 10^{10} \cdot 101 > 2 \cdot 10 \cdot 10^{10}.$$

$$x = 2, y = -1.$$

Перетворимо рівняння до вигляду:

$$(x + 2y)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + 4x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) + 4x^2 = (x(x - 1))^2 + (x + 1)^2 + (2x)^2.$$

31. $2^{10} = 1024$, $2^{100} > 1000^{10}$, тобто цифр буде 31.
1014 або 1035

13 і 6 або 67 і 66

Маємо $x^2 - y^2 = 133$, $(x - y)(x + y) = 7 \cdot 19 = 1 \cdot 133$

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$x = 13, y = 6$$

або

$$\begin{cases} x + y = 133 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$x = 67, y = 66.$$

9 і 6. Позначимо шукані числа відповідно x і y , маємо:

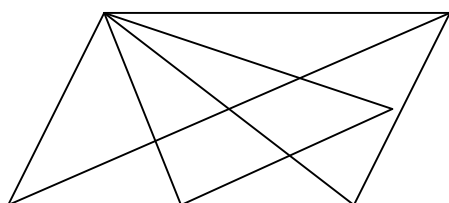
$$\frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{1} = \frac{xy}{18}$$

58 і 87.

Із умови $a + b = 145$, одне парне, одне непарне. Числа повинні містити НСК. $174 = 2 \cdot 3 \cdot 29$. Два і три не можуть бути спільним дільником, бо одне парне, а друге непарне. Отже, спільним дільником є 29.

60° , 120° .

В



ABCD – даний ромб. $BM \perp AD$, $BN \perp CD$, $MN = \frac{1}{2} AC$. Визначити $\angle BAD$ і $\angle ADC$. $\triangle ABM = \triangle CBN$ (за гіпотенузою і катетом), тому $AM = CN$, а $MN \parallel AC$.

Оскільки $MN = \frac{1}{2} AC$, то MN – середня лінія трикутника ACD, а трикутник ABD – рівнобедрений, $AB = BD$, а отже і рівносторонній. Таким чином, $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle ADC = 120^\circ$.

9 клас

1. Нехай $a_1, \dots, a_{2005}$ – цілі числа, а $b_1, \dots, b_{2005}$ – ті самі числа, взяті в іншому порядку. Доведіть, що число $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2005} - b_{2005})$ є парним.
2. Довести, що число 2005 ділиться на 21 .
3. 200 горіхів розклали на 21 купку. Довести, що існують дві купки, в яких горіхів порівну.
4. Довести нерівність
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}} > \sqrt{2005}$$
5. Знайти найбільше $a + \sqrt{b}$, $a > 0$, $b > 0$, якщо $a + b = 4$.
6. Чи можна 27 телефонів з'єднати проводами так, щоб мати 6 телефонів, кожний з яких був би з'єднаний із трьома, 7 телефонів, кожний з яких був би з'єднаний, з п'ятьма, і 14 телефонів, кожний з яких був би з'єднаний із шістьма телефонами?
7. Якщо у многочлені $ax^3 + bx^2 + 2x + d$ замість a, b, c і d підставити числа $-7, -3, 4, 6$ у будь-якому порядку, то одержимо різні многочлени від x . Доведіть, що всі такі многочлени мають спільний корінь.
8. Побудуйте графік функції $y = |x - 1| + |x + 1|$.
9. Розв'язати рівняння: $x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$.
10. У паралелограмі $ABCD$ $AC = AB\sqrt{2}$. Довести, що кут між діагоналями паралелограма дорівнює куту між сторонами.
11. Довести, що число $m^3 + m^2 + m$ при довільному цілому m є цілим.
12. Дано паралелограм $OBCA$. Проведена пряма, яка відтинає від сторони OB одну третю, від сторони OA – одну четверту, рахуючи від вершини O . Яку частину ця пряма відтинає від діагоналі OC ?
13. Довести, що вираз $n^2 - n + 9$ ні при якому $n \in \mathbb{N}$ не ділиться на 49 .
14. Доведіть, що число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ являється квадратом деякого натурального числа. ($n \in \mathbb{N}$).
15. Представити у вигляді суми трьох радикалів $\sqrt{8} + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8}$.
16. Коло, побудоване на катеті трикутника, як на діаметрі, ділить гіпотенузу у відношенні $1:3$. Обчислити кути трикутника.
17. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $3x^2 + 5y^2 = 345$.
18. На якій відстані від початку координат проходить пряма $4x - 3y + 24 = 0$?
19. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють прямокутник, діагоналі якого дорівнюють різниці сусідніх сторін паралелограма.

Відповіді та вказівки

9 клас

Сума $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) + \dots + (a_{2005} - b_{2005}) = 0$, а тому хоча б один доданок – парне число.

$101010a + 10101b = 10101(10a + b)$. 10101 ділиться на 21.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ – кількість горіхів в купці, причому $a_1 < a_2 < \dots < a_{21}$.

Тоді $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{21} \geq 21$, а $a_1 + a_2 + \dots + a_{21} \geq 1 + 2 + \dots + 21 = 231 > 200$.

$$4. \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2005}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2005}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{2004}} > \frac{1}{\sqrt{2005}},$$

$$\text{тому } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}} > 2005 \frac{1}{\sqrt{2005}} = \sqrt{2005}.$$

Нехай $S = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, тоді $S^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \leq a + b + a + b = 8$. $S \leq 2\sqrt{2}$.

Не можна.

Всього з'єднань $6 \times 3 + 7 \times 5 + 14 \times 6$ – непарне число, тому їх не можна розбити на пари.

Всі многочлени мають спільний корінь $x = 1$. Дійсно, при $x = 1$ значення многочлена дорівнює $a + b + c + d = 0$.

При $x < -1$ $y = -2x$, при $-1 \leq x < 1$ $y = 2$, при $x \geq 1$ $y = 2x$.

$$9. x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$2$$

$$(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) - (4x^2 + 8x + 4) = 0,$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 2)^2 = 0.$$

$$10. \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}; \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{AB}{AM} = \sqrt{2},$$

де М - точка перетину діагоналей. Отже, $\triangle ABC$

$\triangle AMB$. ($\angle A$ – спільний і $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$), тому $\angle ABC = \angle AMB$.

$$11. m + m^2 + m^3 = m(m+1)(m+2)$$

$$3 \quad 2 \quad 6 \quad 6$$

$$\frac{1}{7}$$

12. $\frac{1}{7}$. Використати теорему Фалеса, провівши через точку О пряму, паралельну даній, і яка перетинає пряму ВС.

$$13. n^2 - n + 9 = n^2 - n - 12 + 21 = (n-4)(n+3) + 21 = (n-4)[(n-4)+7] + 3 \times 7.$$

Якщо $n-4$ ділиться на 7, то $(n-4)[(n-4)+7]$ ділиться на 49, а $(n-4)[(n-4)+7] + 3 \times 7$ не ділиться на 49.

Якщо $(n-4)$ не ділиться на 7, $(n-4)[(n-4)+7]$ не ділиться на 7, а отже $(n-4)[(n-4)+7] + 3 \times 7$ не ділиться на 49.

$$14. n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = [n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1.$$

Нехай $n^2+3n=k$, $k \in \mathbb{N}$, тоді $k(k+2)+1=k^2+2k+1=(k+1)^2=(n^2+3n+1)^2$

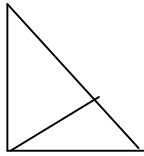
$$15. \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1.$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Піднесемо до квадрата $8 + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{40} \\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{20} \\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

16. $60^\circ, 30^\circ$.



Нехай ABC – даний трикутник, $\angle C = 90^\circ$ і коло з діаметром AC перетинає гіпотенузу AB в точці D так, що $AD = 3DB$. Оскільки $\angle ADC = 90^\circ$, то $BC^2 = AB \cdot BD$, отже $BC^2 = 4BD^2$,

$$BC = 2BD, \quad \cos \angle B = \frac{1}{2}, \quad \angle B = 60^\circ, \quad \angle A = 30^\circ.$$

17. $(10; 3), (10; -3), (-10, 3), (-10; -3)$.

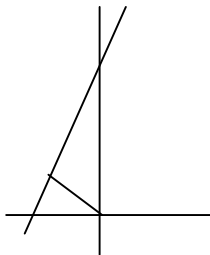
$3x^2 = 345 - 5y^2$. Права частина невід'ємна $345 - 5y^2 \geq 0$.

Оскільки $3x^2$ ділиться на 3, то $5y^2$ повинно ділитися на 3.

Рівняння задовольняють числа $\pm 6, \pm 3, \pm 0$.

$3x^2 = 165, 3x^2 = 300, 3x^2 = 345$. З другого рівняння $x = \pm 10$.

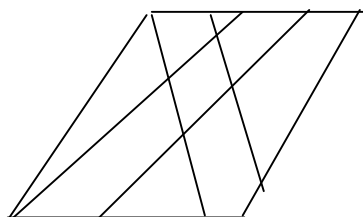
18. 4,8.



Нехай точка C – основа перпендикуляра, проведена з точки O до заданої прямої AB . $\triangle AOB \sim \triangle ACO$, $CO:AO = BO:AB$. $CO = AO \cdot BO = 4,8$

AB

19.



Нехай AN, CM, BP, DQ – бісектриси кутів. Нехай $AN \parallel CM, BP \parallel DQ$,

$A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм

$$\angle ABA_1 + \angle A_1AB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAD) = \frac{1}{2} 180^\circ = 90^\circ$$
$$\angle AA_1B = 90^\circ.$$

$A_1B_1C_1D_1$ – прямокутник.

$\triangle ABN$ і $\triangle CDM$ рівні і рівнобедрені, а точки A_1 і C_1 середини їх сторін AN і CM відповідно. Тому A_1NCC_1 – паралелограм, а отже, $A_1C_1 = NC = BC - BN = BC - AB$.

10 клас

Спростити вираз $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5}$.

Розв'язати рівняння:

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

Довести, що не існує трикутної піраміди, у якої до кожного ребра прилягає тупий кут в одній із граней.

У числі 2006! обчислили суму цифр. В одержаному числі знову обчислили суму цифр і т.д. В кінці одержали одноцифрове число. Знайти його.

Обчислити $\sqrt{11 \dots 1 - 22 \dots 2}$

$2n \quad n$

Чи можна розбити опуклий 17-кутник на 14 трикутників?

У прямокутному трикутнику висота, яка проведена до гіпотенузи, ділить цей трикутник на два. Довести, що сума радіусів кіл, вписаних у три трикутника, дорівнює висоті початкового трикутника.

У прямокутному трикутнику ABC один з гострих кутів дорівнює 30° ,

M – середина гіпотенузи AB , O – центр вписаного кола. Чому дорівнює $\angle OMC$?

Корені рівняння $x^2 - 2px - 7p^2 = 0$ α і β , причому $\alpha^2 + \beta^2 = 18$. Знайти p .

Розв'язати рівняння: $x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 4 = 0$.

Відомо, що графіки рівнянь $y = x^2 + x - 83$ і $x = y^2 + y - 84$ перетинаються в чотирьох точках. Чи існує коло, якому належать ці чотири точки?

Зобразити на координатній площині xOy множину точок, які задовольняють нерівність: $y(x^2 - 9) \geq |x - 3|$.

Довести, що якщо сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то їх різниця дорівнює радіусу вписаного кола.

Із чисел 1, 2, 3, ..., 99, 100 взяли довільно 51 число. Довести, що серед вибраних завжди знайдуться два числа, одне із яких ділиться на друге.

Чи може сума $1+2+3+\dots+(k-1)+k$ при якому-небудь натуральному значенні k закінчуватись цифрою 7?

М'яч, вдаряючись об землю, відскакує і піднімається на $\frac{2}{3}$ висоти, з якої падає.

Якщо першого разу він впав з висоти 8,1 м, то після скількох відскакувань він піднімається на 1,6 м?

Коло, квадрат і рівносторонній трикутний рівновеликі. Знайти відношення їх периметрів.

Рівнобічна трапеція розбивається діагоналлю на два рівнобедрених трикутники. Знайти кути трапеції.

Сума номерів будинків одного кварталу по одній стороні рівна 235. Вказати номери будинків цього кварталу.

Відповіді та вказівки 10 клас

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 5$. Нехай $x + \frac{1}{x} = a$, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

$x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{1}{4}$.

Перетворити рівняння до вигляду $(2x-1)^2 + (3y-1)^2 + (4z-1)^2 = 0$.

У тупокутному трикутнику більша сторона лежить проти тупого кута. З умови випливає, що для кожного ребра піраміди знайдеться більше ребро, тобто немає ребра найбільшої довжини. Але ребер всього 6 і саме найбільше ребро існує. Суперечність.

9. Дане число ділиться на 9. Його сума цифр також ділиться на 9, сума цифр наступного числа також ділиться на 9. І т.д. Отже, одержане одноцифрове число також ділиться на 9.

$33\dots3 \underset{n}{11\dots1} = \frac{1}{9} \underset{2n}{99\dots9} + \frac{1}{9} (102n - 1)$.

$22\dots2 \underset{n}{=} \frac{2}{9} \underset{n}{99\dots9} = \frac{2}{9} (10n - 1)$.

Ні. Сума кутів трикутників не менше за суму кутів 17-кутника. Але сума кутів 17-кутника більше за суму кутів 14-трикутників. Суперечність.

Скористайтесь формулою для радіуса r кола, вписаного у прямокутний трикутник: $r = \frac{a + b - c}{2}$, де a, b – катети, c – гіпотенуза.

Нехай $\angle A = 30^\circ$. Тоді $\angle AMC = \angle BMC = \angle AOC = 120^\circ$ і точки A, M, O, C лежать на одному колі. Отже, $\angle OMC = \angle OAC = 15^\circ$.

$p = \pm 1$. Використати теорему Вієта.

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3, x_4 = 2 \pm \sqrt{6}$. Розкласти ліву частину на множники.

Так, це коло $x^2 + y^2 = 167$. Додати дані рівняння.

Якщо $x > 3$, то $y \geq \frac{1}{x+3}$,

якщо $-3 < x < 3$, то $y \leq -3$, то $y \geq -\frac{1}{x+3}$, якщо $x < -3$, то нерівність неправильна. При $x=3$ дана нерівність правильна, а при $x = -3$ неправильна.

Нехай a, b, c – сторони прямокутного трикутника, де $b=a+d, c=a+2d$.

Тоді $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a+d)^2 = a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 2a^2 + 2ad + d^2, c = (a+2d)^2 = a^2 + 4ad + 4d^2$.

Прирівнявши, маємо $a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$

$a=3d$, тоді $b=4d, c=5d$.

$$r = \frac{\frac{s}{2}}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3d \cdot 4d}{3d+4d+5d} = \frac{12d^2}{12d} = d$$

Будь-яке число $n, 1 \leq n \leq 100$ можна представити у вигляді $n=2^m k$, де m – непарне число, причому $1 \leq k \leq 99$. Серед довільних 51 чисел, кожне з яких не більше 100, обов'язково знайдуться два числа виду $n_1=2^{k_1}m, n_2=2^{k_2}m$, одне з яких ділиться на друге.

Не можна. Якби сума $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ закінчувалось цифрою 7, то $k(k+1)$ закінчувалось би цифрою 4.

4. Перший раз м'яч піднімається на $8,1\frac{2}{3}$.

Другий раз міч піднімається на $8,1\left(\frac{2}{3}\right)^2$

n -й раз м'яч піднімається на $8,1\left(\frac{2}{3}\right)^n$

За умовою $8,1\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,6$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

17. $\sqrt{\pi} : 2 : \sqrt[4]{27}$. Позначимо радіус кола R , сторону квадрата a_4 і сторону

рівностороннього трикутника a_3 . $\pi R^2 = \frac{a_4^2 \sqrt{3}}{4}, a_4 = R\sqrt{\pi}, a_3 = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

Відношення периметрів $2\pi R : 4R\sqrt{\pi} : \frac{3R\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt{\pi} : 2 : \sqrt[4]{27}$.

18. $108^\circ, 108^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. Шукана трапеція відтинається від правильного п'ятикутника діагоналлю.

19. 43, 45, 47, 49, 51.

Очевидно, що в задачі йде мова про будинки з непарними номерами.

Нехай $2x+1$ – номер першого, а $2y-1$ – номер останнього будинку. Приймаючи до уваги $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$, приходимо до рівняння

$$y^2 - x^2 = 235$$

$$(y-x)(y+x) = 235, 235 = 1 \times 235 = 5 \times 47.$$

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=235 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y-x=5 \\ y+x=47 \end{cases}$$

$$x = 117, y = 118$$

$$x=21, y=26$$

11 клас

$$\frac{\sin 2x}{\cos x}$$

Побудуйте графік функції $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$

Всі точки простору пофарбовані у три кольори. Довести, що можна знайти дві точки одного кольору на відстані 1м одна від одної.

Нехай $a < b$ і $c < d$. Довести, що $(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$.

Два протилежні кути чотирикутника тупі. Довести, що діагональ, яка сполучає вершини цих кутів, менша за іншу діагональ.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Знайти найменше значення функції $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Що більше: 12723 чи 51318?

Знайти суму $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{143} + \sqrt{144}}$

$$\frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{7}$$

Розв'язати рівняння в натуральних числах: $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{7}$.

$$\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a^3}$$

Відомо, що $a + \frac{1}{a}$ - ціле число. Довести, що $a^3 + \frac{1}{a^3}$ теж ціле число.

$$\frac{x^2 + kx + 10}{x^2 + 3x + 10}$$

Визначити значення k , якщо відомо, що нерівність $\left| \frac{x^2 + kx + 10}{x^2 + 3x + 10} \right| \leq 1$ виконується для всіх x .

Розв'язати систему рівнянь:

{

$$1 - x_1 x_2 = 0;$$

$$1 - x_2 x_3 = 0;$$

$$1 - x_3 x_4 = 0;$$

.....

$$1 - x_{11} x_1 = 0$$

12. На бісектрисі прямого кута взято точку P . Через неї провели довільну пряму,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

яка відтинає на сторонах кута відрізки a і b . Доведіть, що величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не залежить від цієї прямої.

13. Знайти всі тризначні числа, які дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

14. Натуральне число N є квадратом і не закінчується нулем. Після закреслення у цього числа двох останніх цифр знову одержуємо точний квадрат. Знайти найбільше число N з такою властивістю.

15. Знайти три (нерівних між собою) цілих додатних числа, щоб сума всіх трьох і кожних двох була квадратами.
16. Розкласти на множники $x^{10} + x^5 + 1$.
17. Обчислити площу рівнобедреного трикутника, якщо пряма, яка сполучає середини основи і бічної сторони, дорівнює половині радіуса описаного кола.
18. В трикутнику дано дві сторони a і b і відомо, що сума висот, опущених на ці сторони, дорівнює третій висоті. Обчислити третю сторону c .
19. В рівнянні $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\dots = \sqrt{1980}$ число радикалів нескінченне. Знайти, чому дорівнює x .

Відповіді та вказівки 11 клас

$$y = 2 \sin x, \quad x \neq \pi(2n+1), \quad \text{де } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Розглянемо чотири точки-вершини трикутної піраміди з ребрами довжиною в 1 м. Якщо три вершини пофарбовані в різні кольори, то четверта вершина пофарбована в колір однієї з трьох вершин.

$$3. (a+b)(c+d) - 2(ac+bd) = (c-d)(b-a) < 0.$$

4. На другій діагоналі, як на діаметрі, побудуємо коло. Діагональ, що сполучає тупі кути, розташована всередині кола, оскільки кути тупі.

$$5. -1. \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

$$51318 > 12723 \quad 51318 > 51218 = (29)18 = 2162;$$

$$12723 < 12823 = (27)23 + 2161.$$

11. Позбутися ірраціональності у знаменнику.

$x=4$, $y=3$, $z=2$. Так як y – натуральне число, то $y \geq 1$ і x – ціла частина числа 30, тобто $x=4$. Аналогічно, $y=3$, $z=2$.

7

$$\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right)$$

3. Так як $x^2 + 3x + 10 > 0$ при всіх x , дану нерівність можна переписати:
 $|x^2 + kx + 10| \leq x^2 + 3x + 10$, що рівносильно системі:

$$\begin{cases} x^2 + kx + 10 \geq -x^2 - 3x - 10; \\ x^2 + kx + 10 \leq x^2 + 3x + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + (k+3)x + 20 \geq 0; \\ (k-3)x \leq 0 \end{cases}$$

Система виконується для всіх x , якщо $k=3$.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11} = \pm 1.$$

Перенесемо вільні члени вправо. Поділимо кожне рівняння на наступне, а останнє рівняння на перше. Одержимо рівність всіх змінних

Нехай $\angle BAC = 90^\circ$, BC – довільна пряма, $P \notin BC$, $AB=a$, $AC=b$, $AP=c$.

Тоді $S(\triangle ABC) = \frac{ac\sqrt{2}}{4}$; $S(\triangle APC) = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$;

4

4

$$S(\triangle ABC) = \frac{ac\sqrt{2}}{4} = \frac{c\sqrt{2}}{4} (a+b), \quad \frac{a+b}{ac} = \frac{\sqrt{2}}{c}, \text{ а ця величина не залежить від прямої.}$$

13. $145 = 1! + 4! + 5!$

Нехай $abc = a! + b! + c!$, оскільки $7! = 5040 > 1000$, отже, серед цифр a, b, c немає цифр більших 6. Серед них немає також цифри 6, так як $abc > 6! = 720$. Зробивши перебір між числами 1, 2, 3, 4, 5, одержимо число $145 = 1! + 4! + 5!$

14. $N = 1681$. Закреслюючи дві останні цифри числа N і замінимо їх нулями. Очевидно, одержуємо точний квадрат деякого числа n . Тоді $\sqrt{N} \geq n+1$, так що $(n+1)^2 - n^2 \leq 99$, $2n \leq 98$, $n \leq 49$. З другої сторони n закінчується нулем. Максимальним числом буде $n = 40$, $N = 412^2 = 1681$.

15. 80, 320, 41. Позначимо суму всіх трьох чисел a, b і c $a+b+c = (1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$. Якщо сума двох перших чисел $a+b = x^2$, то третє число $c = 2x + 1$. Якщо $b+c = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, то $a = 4x$, $b = x^2 - 4x$, $a+c = 6x + 1$ повинне бути квадратом.

$$6x+1=121, x=20$$

{	$a+b=400$	$b=400-80=320$
	$b+c=400-40+1$	$c=400-40+1-320=41$
	$a=80$	

$$16. x^{10} + x^5 + 1 = (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7) + (x^7 + x^6 + x^5) - (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

$$\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$17. \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$18. c = a + b, S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, hc = ha + hb$$

$$c = \frac{2S}{h_a + h_b}, \quad ha = \frac{2S}{a}, \quad hb = \frac{2S}{b}$$

$$19. \sqrt{1980}$$

Позначимо $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = y$. Одержимо $y = \sqrt{1980}$.

З іншої сторони всі корені без першого будуть дорівнювати y .

$$\text{Звідки } \sqrt{xy} = \sqrt{1980}, xy = \sqrt{1980}, x\sqrt{1980} = 1980, x = \sqrt{1980}.$$